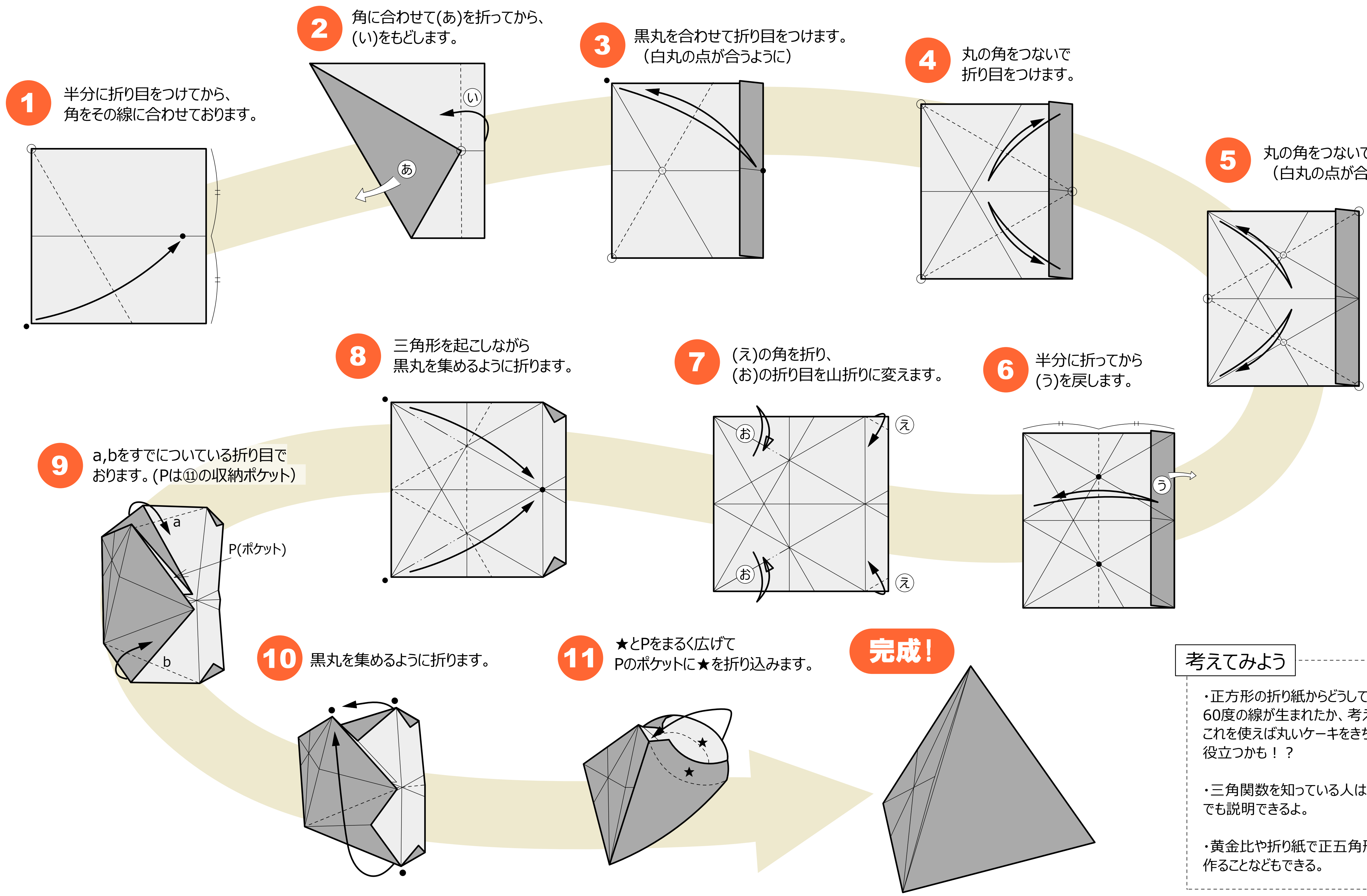
『折り紙図形パノラマ（1984）』（笠原邦彦 著）より

1枚折の正四面体の折り方

難易度　★

そこにシビれるあこがれるゥ！

たった１枚の正方形から、定規や分度器も使わずに正三角形が４つ集まった立体ができあがるのが面白い。
そして、無駄がまったくない！四面体を構成する三角形からこぼれた、残りの長方形も、糊(のり)を使わずに形を固定するための最後の要として活用されているのです。
笠原さんは僕（オリケン 48歳）が小学生の頃に活躍していた、単純な工程でシビれるような造形を生み出す尊敬する折紙作家ですが、同時期に別の二人もこれと全く同じ正四面体の折り方を発見したそうです。



考えてみよう

・正方形の折り紙からどうして、正三角形の60度の線が生まれたか、考えてみよう。
これを使えば丸いケーキをきちんと6等分するのに役立つかも！？

・三角関数を知っている人は同じことが三角関数でも説明できるよ。

・黄金比や折り紙で正五角形の角(108度)を作ることなどもできる。

『立体折り紙アート（2015）』（三谷 純 著）他より

曲線折り紙の折り方

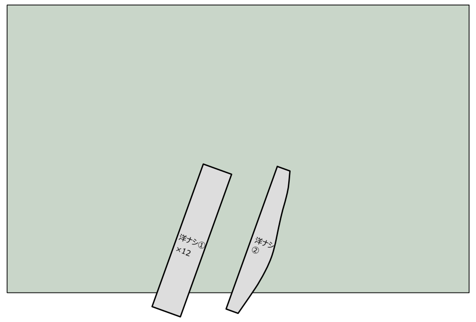
あかり	難易度 ★★	球体	難易度 ★★★
水車	難易度 ★★★★	洋ナシ	難易度 ★★★★★

そこにシビれるあこがれるぅ！

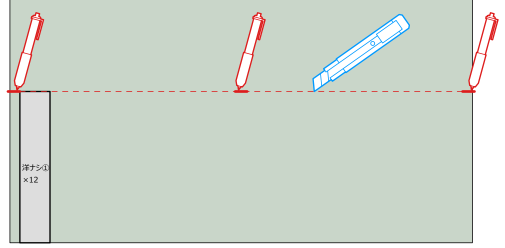
折り紙はくねくねとした曲面を作るのは苦手、と思っていませんでしたか？僕もそう思っていましたが、実は幾何学を駆使してこんな形も作れるのです。
著者の三谷 純さんは、大学でコンピュータグラフィック等を研究しているかたわら、数学的に折り紙の研究をされています。素晴らしい作品や今回のような折り紙の展開図も公開していますので、筑波大学の研究室のウェブサイトを覗いてみては？
また、折り紙的な発想は、デジタルファブリケーションの発展ともつながって、様々な可能性を秘めています。

洋ナシの場合（他も基本的に同じです）

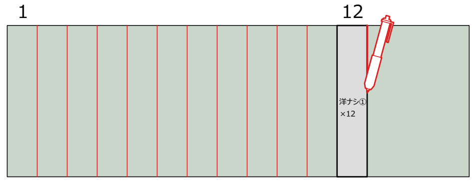
1 好きな色の紙と型紙①、②を準備。紙は完成時に裏面にしたい方を上にします。



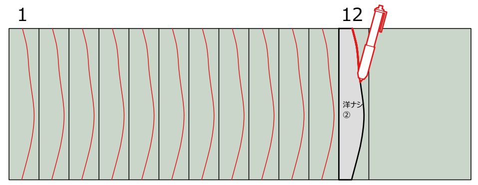
2 型紙①の高さで3箇所ほど印をつけ、それをつないだ線で切ります。



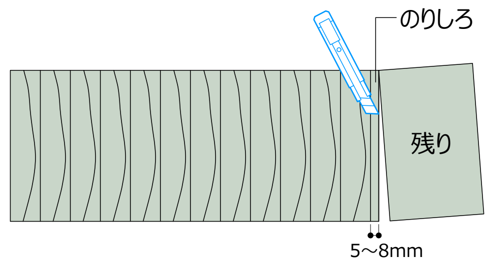
3 型紙①の幅で書いている数だけ線を引きます。（洋ナシの場合は12）
※ 数を間違えないこと。
※ 線は丁寧にしっかりと引くこと！



4 同様に型紙②の曲線をなぞるように線を引きます。



5 のりしろを5～8mm程度残して切ります。(残りは使いません)
※ のりしろ忘れないで！



6 ③で引いた直線を谷折り、④で引いた曲線を山折りにして折り目をつけていきます。

曲線はぺったりと平面につぶすことができないので、両手の指でつまむようにしながら、丁寧に折り目をつけていきます。
この時、無理に力をかけると、④で引いた線から折り目がズレて余計な折り目がついてしまうので注意してください。

7 折り目がついたら、のりしろにボンドを付けて円筒状になるよう接着してください。

接着後は、しっかりくっつくまで指で押さえて圧着・乾燥させます。

8 しっかり接着したら、折り目に合わせて、丸く折りたたんでください。

ここ、かなり難しいです。
両手で包み込みながらヒダを回転させるようにすぼめていきます。
無理せず、少しづつ、何度もトライしてください。
洋ナシと球体は上下とも、すぼまるのでまずは上下それぞれで丸めてみたほうが良いです。

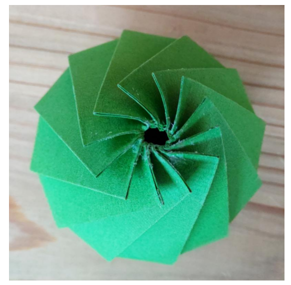
8 かたちがある程度決まってきたら、ヒダの重なる部分にボンドを塗ってから、再度すぼめて固定してください。

薄い紙ではきっちり折り目をつけると、接着なしでもある程度形が固まりますが、今回は厚手の紙を使用するので、接着したほうが良さそうです。急がずじっくりと。

洋ナシと球体は上下のどちらかを接着してから反対側の⑧の作業をしても良いです。

完成！ 曲線に添ってなめらかな形状になるように、全体を整えて完成！

→上から見ると、こんな風に渦巻き状になっています。
もう少し上手に作れれば、真ん中は隙間が開かずにぴったり閉じます。



折り紙とキカガク（平面折り紙編）

キカガク（幾何学）とは図形や空間の性質を研究する分野で、折り紙と幾何学とは深い関わりがあります。

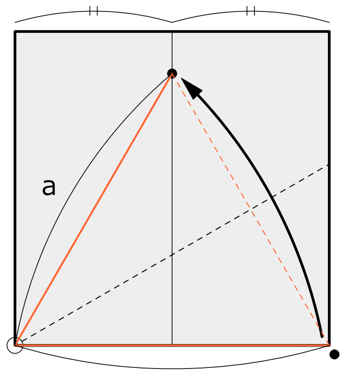
折り紙と正三角形

『1枚折りの正四面体』で正三角形を折りましたが、折り紙は正方形、正三角形は60°という正方形にはない角度が使われています。

では、折り紙で正三角形を折るにはどうすればいいでしょうか。
それは、正三角形の”３つの辺が同じ長さ”という性質を使います。

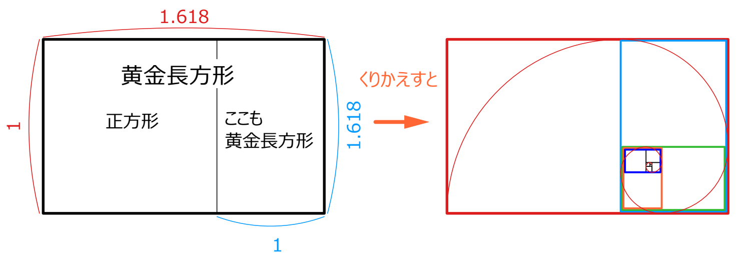
右の図のように、半分に折り目をつけてから、角をその線に合わせて折ると、正方形の辺と同じ長さのナナメの線が出来上がります。
ここで、最初に半分に折ったので、反対の右側も同じ長さのナナメの線ができるのが分かるでしょうか。

これで正三角形の完成です。単純ですが、不思議な面白さがありますね。



黄金比について

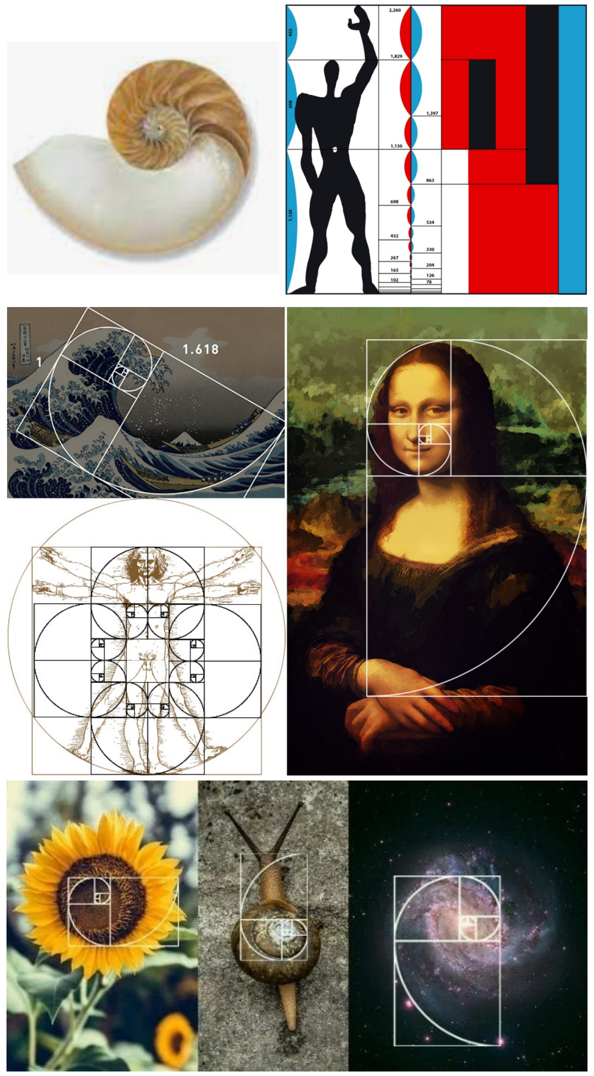
黄金比という言葉を知っていますか？
黄金比は不思議な性質を持っている比率で、約1.618。
「人間が最も美しいと感じる比率」とも言われています。



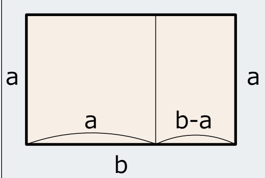
黄金比の長方形（黄金長方形）の中に、正方形を書くと、残りの長方形も黄金長方形になるという性質を持っています。

また、黄金比は自然界の中にもたくさん見つけられます。
それは、繰り返すことのできる性質が自然界の成長する力とマッチしたからでしょう。

人間が黄金比を美しいと感じるのも、それが自然界の重要な原理だからなのでは？
（20世紀の建築家コルビュジェは黄金比を使った寸法体系を作って、建築の美しさを寸法によって生み出すことを目指しました）



おまけ（高校数学の知識で黄金比を求める）

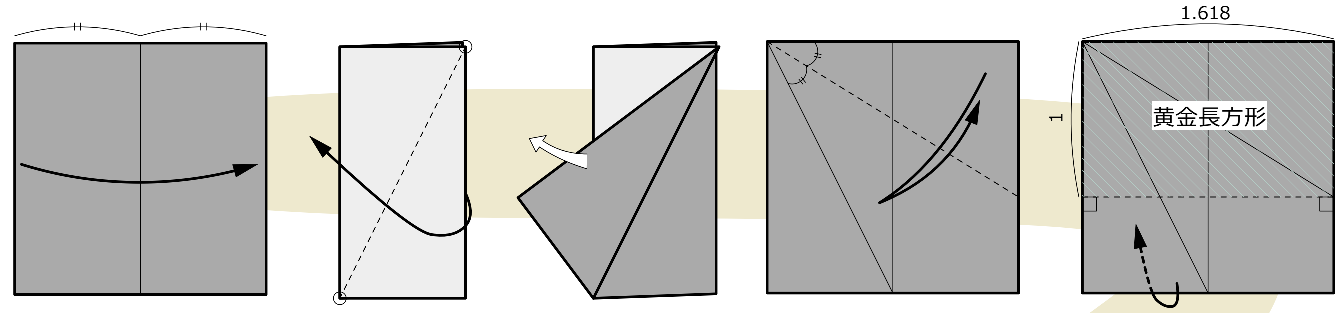


黄金長方形の大きい長方形と小さい長方形が相似形になるという性質を比例式で書くと
$a:b = (b-a):a \rightarrow a^2 = b^2 - ab$
となる。a=1の時 $b^2-b-1=0$
これを2次方程式の解の公式で解くと
$b = (1+\sqrt{5})/2 \fallingdotseq 1.618$となる。
これが黄金比です。

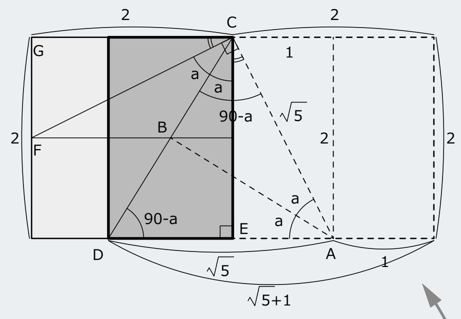
折り紙と黄金比

その、黄金長方形、実は折り紙ではたった４折りで折れてしまうのです。

1 まず半分に折る
2 角を結んで折ってから拡げる
3 半分の角度で折り目をつける
4 角で直角に後ろに折る



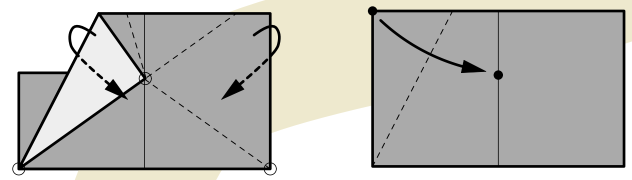
おまけ（黄金長方形を証明してみる）



これで黄金長方形の完成！
そして、その黄金長方形は不思議なことに正五角形の秘密を持っているのです。（人が五芒星の神秘性を感じる理由はこんなところにもあるのかも）

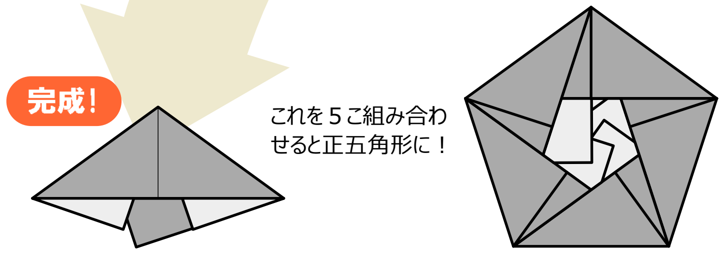
これを確かめるために続きを折ってみましょう。

6 角をつないで2か所を裏に折る
5 角が真ん中の線に乗るように折る



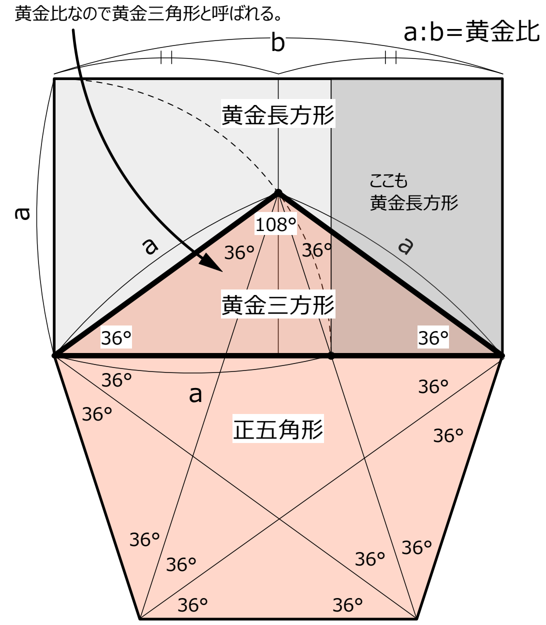
完成！

これを５こ組み合わせると正五角形に！



（実は、正方形1枚でも、ほとんど正五角形と変わらない正五角形そっくりさんの折り方もあります。）

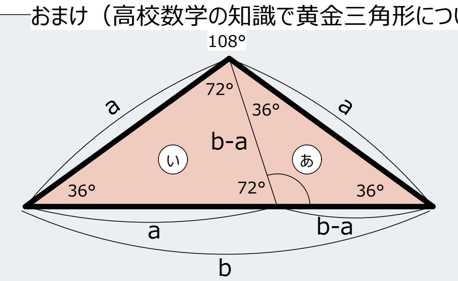
この三角形（角度が180°と36°）は辺の長さの比率が黄金比なので黄金三角形と呼ばれる。



108°を3つに割ると36°、36°が5個または36°+72°+72°で180°、というあたりも、キガガク好きにはグッとくるポイントです。

黄金長方形と正五角形の関係

おまけ（高校数学の知識で黄金三角形について考える）



黄金三角形の大きい三角形の辺の長さをa,bとする。
それぞれの角度は上の図から36°,72°,108°となる。
三角形(い)は72°が２つで二等辺三角形になるので、下の辺はaとなり、残りの(あ)の辺はb-aとなる。
大きい三角形と三角形(あ)は相似形なので、a:b = (b-a):a となり、
黄金長方形と同じ $a^2 = b^2 - ab$ の式が現れる。
すなわちa:bは黄金比なのである！（ちなみに、三角形(あ)(い)はどちらも黄金三角形）

折り紙とキカガク（曲面折り紙編）

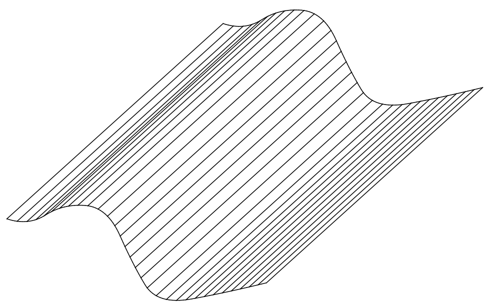
紙がつぶれない条件

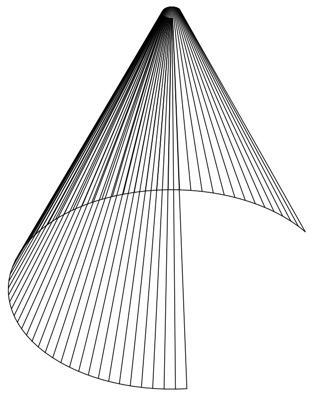
『曲面折り紙』では平面のはずの折り紙が曲面のかたちになりました。

それはなぜでしょう？
どんな曲面でも作れるのでしょうか。

1枚の紙がつぶれずに折れる形にはある決まりがあります。

紙は、下の図のようにスダレのように、たくさんの直線が平行に並んだかたち、または、
円錐のように放射状に並んだ形であればつぶれずに折れます。



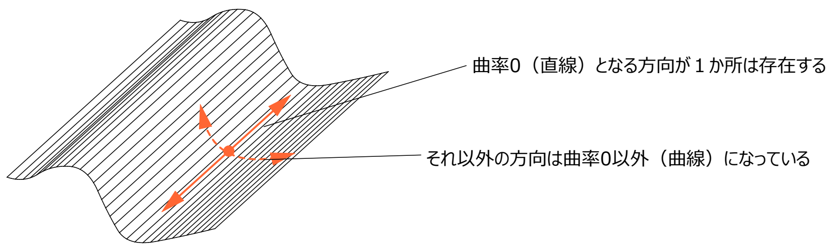


可展面・ガウス曲率

余談ですが、面白いので紹介します。
上のような紙をつぶさず折れる曲面は、数学的には**可展面**、もしくは**ガウス曲率**が0と言えます。

可展面というのは、平面に展開できる形、ということなので、もともとの折り紙の性格ですね。
可展面の定義は、ガウス曲率が0であること、です。

ガウス曲率は、ある曲面上の1点を通るすべての方向の曲率（曲がり具合）のうち、最小の曲率と最大の曲率を掛けたものです。
（ガウス曲率は「数学の王」と呼ばれるガウスがもっとも驚くべき定理とした不思議な性質がある）
上のような直線だけでできた曲面は、必ず曲率が0となる方向が1箇所存在するため、最小値（の絶対値）は常に0、すなわちガウス曲率は常に0になります。つまり、ひろげると平面に戻せます。

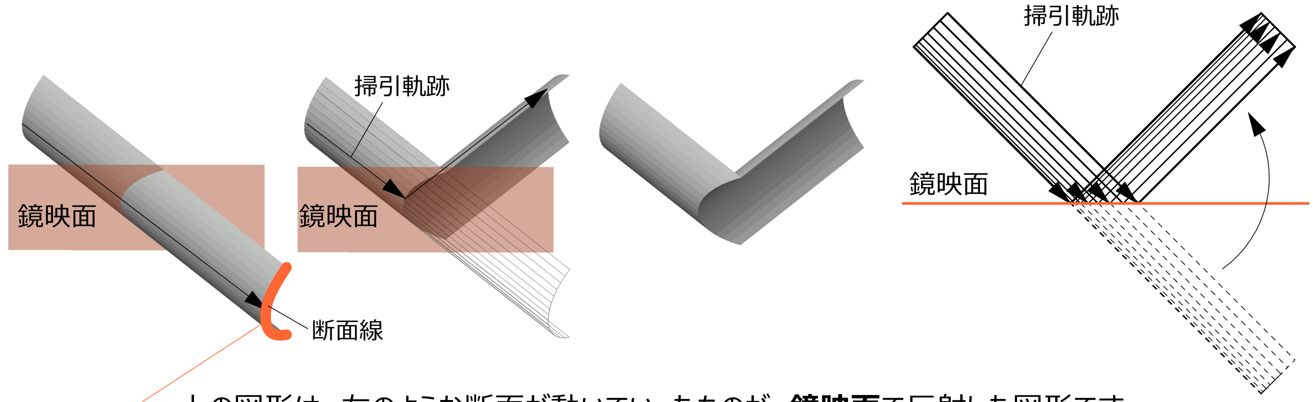


鏡映反転

つぶれないスダレだけでは、とても複雑な曲面折り紙はできなさそうですが、どうやっているのでしょう？

実は、曲面折り紙は**鏡映反転**という手法を使っています。

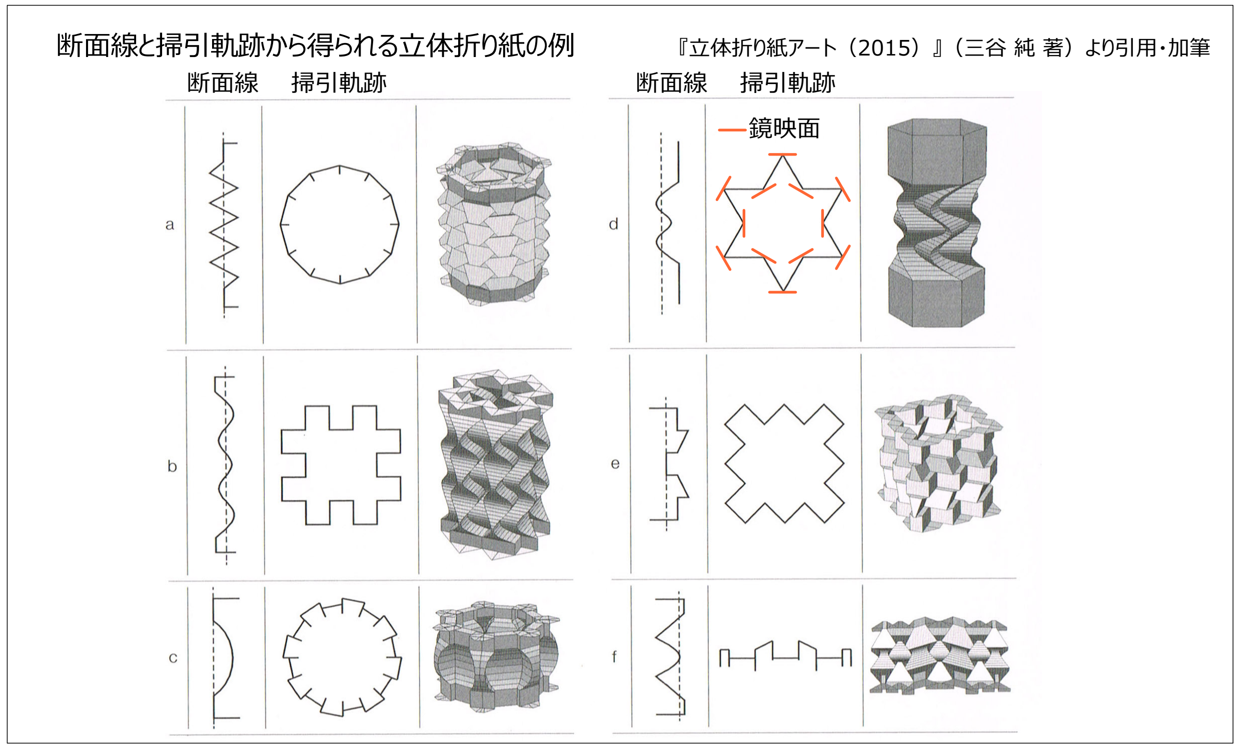
スダレの中の全ての直線がある面にぶつかったときに、鏡に光がぶつかったように反射した図形を考えます。
この図形はつぶれさずに折れることが分かっているので、この手法を使って面の方向を切り替えることができるのです。



上の図形は、左のような断面が動いていったものが、**鏡映面**で反射した図形です。
また、断面のそれぞれの点が反射しながら動いた軌跡を**掃引軌跡**（そういんきせき）と呼びます。

曲面折り紙はこの性質を厳密に計算して設計されたものですが、いやはや面白いものです。

下の例も１枚の紙から折れる形ですが、断面が動いている様子ををイメージできますか？
（僕は右上くらいしか無理でした）

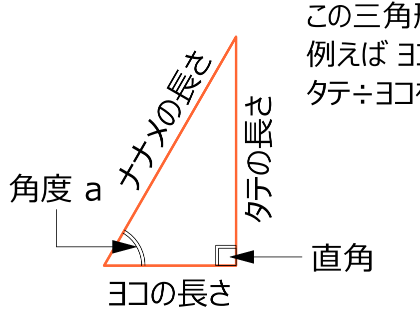


君たちがやがて出会う三角関数という友達

三角関数は高校でならうもの（僕が子供の頃は中学で習いました）ですが、三角関数の初歩でつまづく子も多いです。
だけど、三角関数の初歩は実は小学生でも分かるくらいに超簡単！おまけに、知っていると応用が効くことがたくさんで仕事にも役立ちます。
せっかく幾何学について考えるので、少し三角関数について考えてみよう。見た目ほど難しくないので、(昔つまづいた大人の人も）チャレンジしてみて！

三角関数って何？基本①

三角関数はその名の通り、直角三角形のタテ･ヨコ･ナナメの長さの関係を示す関数です。
下の図の直角三角形を考えてみましょう。この三角形の角度の一つはa（下の絵は60度）です。



この三角形から２つの辺を選んだ時の長さの関係を三角関数は教えてくれます。
例えば ヨコ÷ナナメをcos a(コサイン),タテ÷ナナメをsin a(サイン),
タテ÷ヨコをtan a(タンジェント)といいます。

$$\cos a=\frac{\text{ヨコ}}{\text{ナナメ}} \quad \sin a=\frac{\text{タテ}}{\text{ナナメ}} \quad \tan a=\frac{\text{タテ}}{\text{ヨコ}}$$

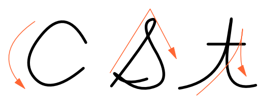
基本はたったこれだけです。

覚えるのが大変そうだって？

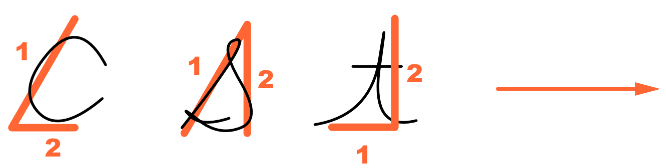
これも簡単。

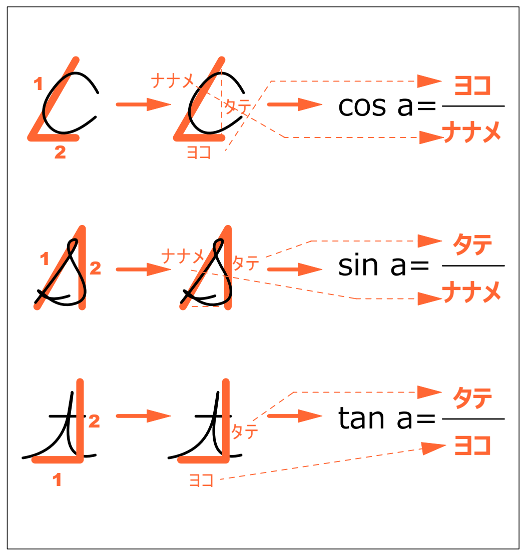
僕は子どもころから覚えるのが大嫌いだったので、その時に編み出したとっておきの覚え方を教えましょう。（調べてみたら有名な覚え方みたいだけど、とにかく覚えるのが苦手だった僕はとにかく覚えることは少なくしたいと思って自分で編み出したんだ。と思ってたけど、自信がなくなってきた・・・・やっぱり先生から聞いたのかな・・・・）

まずcos,sin,tanの頭文字、c,s,tを筆記体で書いてみよう。（筆記体は今は習わないんだっけ？）

書き順は  こんな感じだよね。

書き順を意識すると、この文字から、下の絵のような形が見えてこない？
これが見えてきたら、先程の式は覚えたも同然。
あとは１は分数の下(母)に、2は分数の上(子)に入れるだけ！
（母から子が生まれるから、当然母が1）

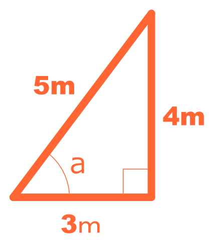




順番分かれば簡単。
僕も毎回筆記体を頭に思い浮かべてるので、未だに公式は暗記はしてないのだ！

では、有名な345の直角三角形で実際に三角関数を使ってみよう。

(小学生の頃、サッカーのコートのラインを引く時、直角をメジャーで3m,4m,5mの長さをつくって出していた。これは大工さんもよく使う技。)



$$\cos a=\frac{\text{ヨコ}}{\text{ナナメ}} = \frac{3}{5} =0.6$$

$$\sin a=\frac{\text{タテ}}{\text{ナナメ}} = \frac{4}{5} =0.8$$

$$\tan a=\frac{\text{タテ}}{\text{ヨコ}} = \frac{4}{3} =1.333...$$

※3,4,5の三角形が直角三角形であることは
三平方の定理というもので証明できる。
ちなみにaは約53.13°です。

分かったかな？

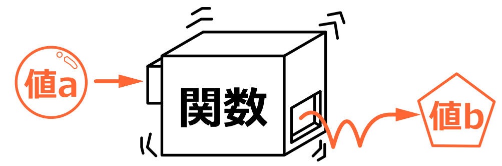
これが分かれば三角関数の基本①はクリアー！

ちょっと待って！　三角関数って結局何の意味があるのか分かんない！これが分かったからって、だからどうしたの？

と思ったあなた。 あなたの疑問は鋭い。

三角関数は、世界の中の何かの秘密を解き明かした原理や定理とは違って、ただ**関数**を定義したに過ぎません。

関数というのはある数字を入れると、その定義に従って
対応した別の数字が出てくる箱のようなものです。



例えば、コサインは、角度という数字を投げ込めば、ナナメとヨコの長さの比率がいくつになるかを吐き出す箱で、
人間がそういう箱をコサインと名付けようと、勝手に決めただけのものです。

三角関数はいわば、それまで別々の世界だった、
角度と長さの世界をつなぎ合わせるための道具と言えます。

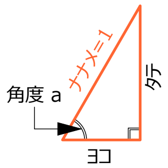
この定義したものに過ぎなかった三角関数ですが、その後独自のいくつもの定理が発見されます。（続きは高校で）
そして、次に書くように円の概念と結びつくことで、新たな可能性へと開かれていくのです！

三角関数は円と超なかよし！　基本②

分からないかも知れないけど、まずはチャレンジ！
ここが分かると三角関数はグッと使える知識になるよ。

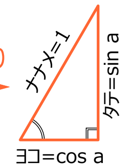
三角関数は実は、円と超なかよし。
工学部なんかではこっちの考えの方を使うことが多いけど、考え方は、左の三角形と同じです。
これが何となくでも分かると、高校の数学、最初の三角関数のテストで90点くらいとれるかも！

①三角形のナナメを1とするとヨコ=cos a,タテ=sin a
になるのが分かるかな？



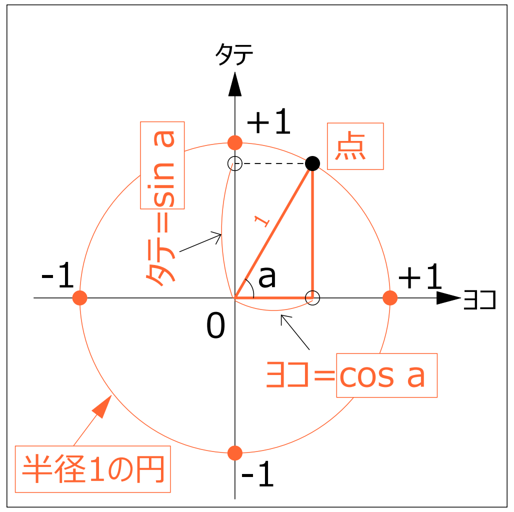
cos a=$\frac{\text{ヨコ}}{\text{ナナメ}}$=$\frac{\text{ヨコ}}{1}$=ヨコ　つまり

sin a=$\frac{\text{タテ}}{\text{ナナメ}}$=$\frac{\text{タテ}}{1}$=タテ



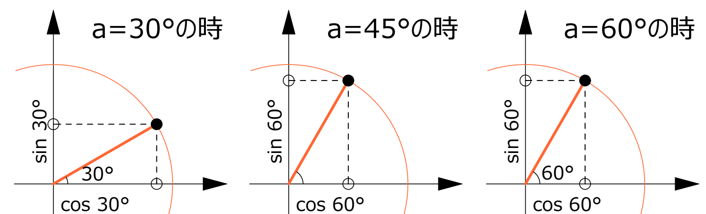
言い換えると、ナナメが1の時のヨコをcos,
タテをsinと呼ぼう、というのが三角関数の
定義とも言える。

②これを半径が１の円に重ねると、
右図の点のヨコ方向の位置がcos a,
タテ方向の位置がsin aになるんだ。



難しくてもこの絵がなんとな～く分かれば大丈夫。
とりあえず、
「半径１の上の点の
　ヨコ方向位置がcos a
　タテ方向の位置がsin a」
とだけ覚えればそれでOK！

ここで少し暗記。高校の数学ではテストで出るので、
生活の中でもよく出てくる単純な角度　30°, 45°, 60°のcon,sinの数値は覚えることになってる。
(tanは覚えなくてもいい。cos,sinから作れるので)



cos 30°=$\frac{\sqrt{3}}{2}$=約0.86
sin 30°=$\frac{1}{2}$=0.5

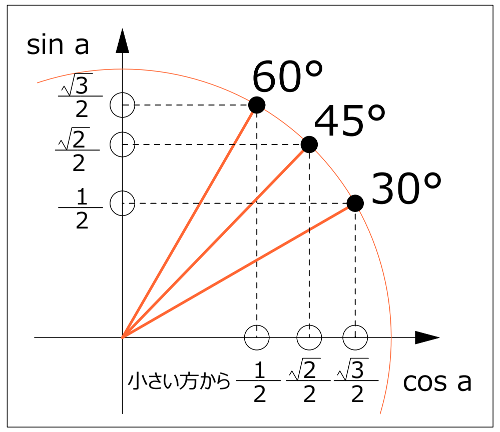
cos 45°=$\frac{\sqrt{2}}{2}$=約0.71
sin 45°=$\frac{\sqrt{2}}{2}$=約0.71

cos 60°=$\frac{1}{2}$=0.5
sin 60°=$\frac{\sqrt{3}}{2}$=約0.86

やっぱり、覚えるのが大変そうだって？
僕もそう思う。なのでここでも僕の編み出した覚え方を教えましょう。それは、
「小さい方から２分のルート1,2,3」
これだけです。($\sqrt{1}$= 1 だね)

$$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(ルート($\sqrt{\ }$)がわからない時は、今はそういう記号だと思ってればOK)



ここで、30°, 45°, 60°を一つの図にまとめてみます。

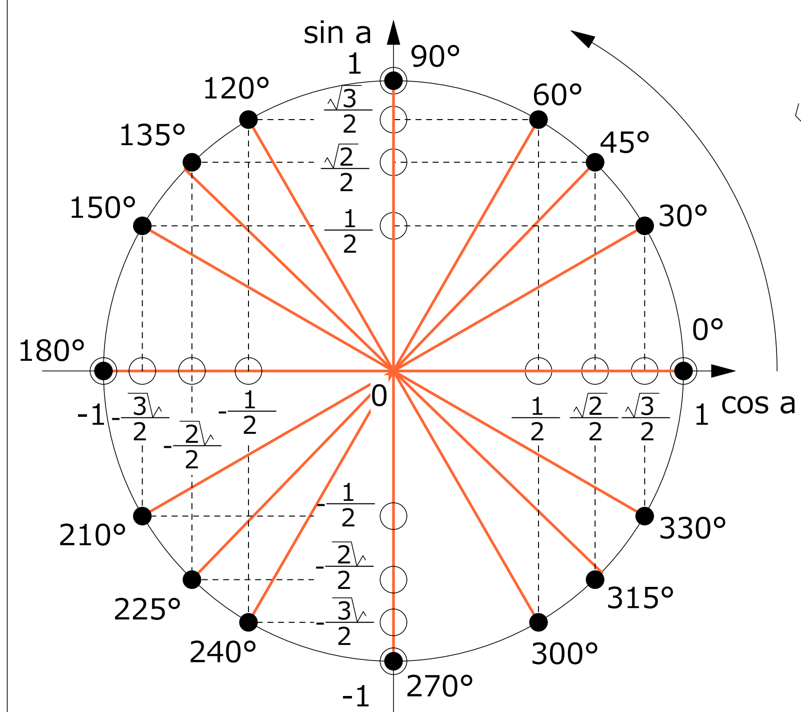
それぞれの点のヨコとタテの数字をみると、sin,cosの値が分かる仕組みになっています。

「半径１の上の点P の　ヨコ方向位置がcos a
**　タテ方向の位置がsin a」**
「小さい方から”２分のルート1,2,3」
この２つだけで、それぞれのsin,cosが分かる
というのが理解できたかな？

ここからが本番。
三角関数を円に当てはめることで、直角三角形では作図できない角度のcos,sinを知ることができるんだ。

それが、円で書いてみるとイメージできるようになるのだ！
ただし、ヨコの左側と、タテの下側は数字がマイナスになるよ。

もともとは三角形の関数だったものが、**拡張**（ポケモンでいうと進化）されて、三角形以外にも使えるようになったのだ！



左の図を見ると、例えば
cos 120=-$\frac{1}{2}$　,sin120=$\frac{\sqrt{3}}{2}$だと分かる。
ちなみにcos 0=1。
僕は数字を覚えるのが嫌でテストの時は毎回この絵を書いてた。

では、sin 315, cos 315, sin270, cos270 は何になる？

三角関数の基礎はここまで。
とりあえずは、分かった人も、分からなかった人も、
「三角関数は角度が分かればヨコとタテの位置を決めることができる道具」
だと覚えてくれればそれでOKです。

三角関数は、実数と虚数（実際には存在しない数）と結びついて、
めくるめく不思議な世界へとつながるのですが、その話はもっと大きくなってから出会うでしょう。

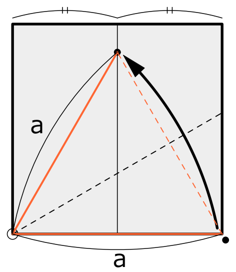
※三角関数が2000年以上の歴史の中で進化してきてるので、肖像画はその中の二人を選んだだけです。

三角関数ってどんなことに使えるの？

三角関数基本は分かったかな？ちょっと難しかったかもね。
ここでは、三角関数がどんなことに使えるか、少しだけ紹介します。数学の世界では三角関数はもっともっと拡がりのある面白いものだけど、
ごくごく単純な例で考えてみましょう。

三角関数を使って折り紙を60°に折る

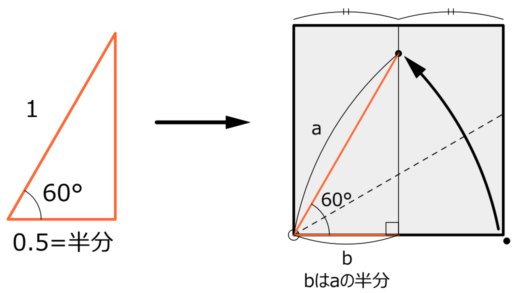
『1枚折りの正四面体』で正三角形を折るのに最初に下のように折ったね。
これは正三角形が３つの辺の長さが同じだから、というのは前に書いた。



aは同じ長さ

今度は別の考え方で考えてみよう。
正三角形の一つの角度は60°。そして、cos60°は1/2＝0.5だったね。
では、折り紙を60°の角度で折るにはどうしたらいいだろう？
ちょっと考えてみよう

折り紙を60°の角度で折るには60°の直角三角形をつくるといい。
そのためには、cos60°＝0.5なのでヨコの線はナナメの線の半分の長さで折ればいいことになる。



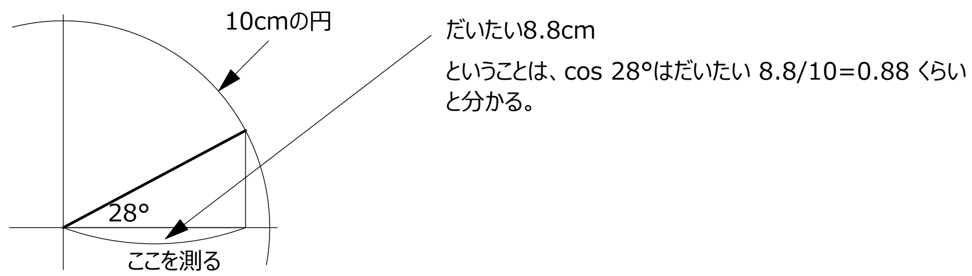
ほら、最初に折り紙を半分に折ったのは、
実は、cos60°＝0.5 を使って60°をつくるためでもあったのが分かるかな？

こんな風にキガガクの知識は実は折り紙でもいろんな場所に使われているんだ。

コンピューターを使う

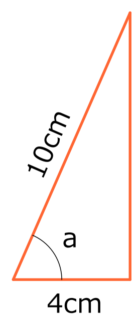
cos60°みたいなよく使うものは数字を覚えればいい。
だけど、cos28°とか覚えてない数値ははどうやったら分かるだろう。

一番単純なのは、例えば10ｃｍの円に、分度器で28°の線を書いて、ヨコ方向の位置を定規で測れば、
だいたいの数値は分かる。



実際には三角関数を使おうとすれば、コンピューターに教えてもらうことが多い。
電卓でもいいし、プログラムの関数をつかってもいい。グーグルで「cos 28°」と検索するだけでも、ちゃんと
「0.88294759285」と教えてくれる。

逆にナナメ、ヨコ、タテのうちどれか2つが分かる場合に、角度を教えてくれる関数もある。
（arccos(アークコサイン）、arcsin(アークサイン)、arctan(アークタンジェント)関数
$\cos^{-1}$,$\sin^{-1}$,$\tan^{-1}$とも書く）



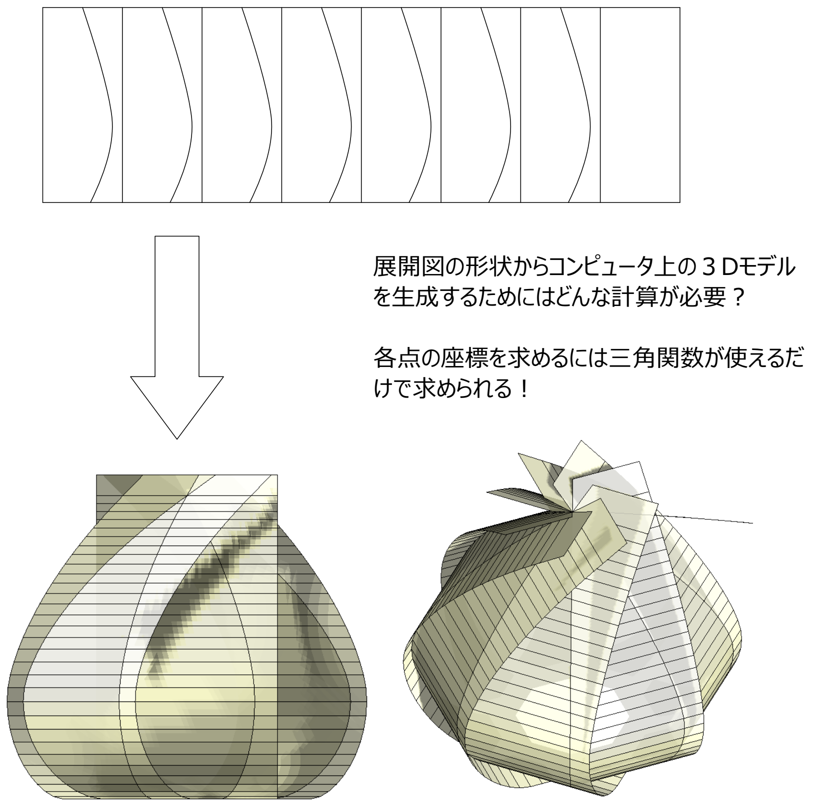
例えば、ナナメが10cm、ヨコが4cmだと分かっている三角形がある。
この三角形の角度aを知りたいとする。
この三角形のcos は4÷10で0.4だと分かるので
arccos 0.4 の値をコンピューターに聞くと、角度a=arccos　0.4=　66.4218…°
と教えてくれる。

これらを使うと、複雑な形状を長さと角度を使って自在に扱うプログラムをつくることもできる。
（三角関数がなければ、今の3Dゲームなんかは到底つくれなかったでしょう。）

単純な三角関数だけでこんなこともできる！

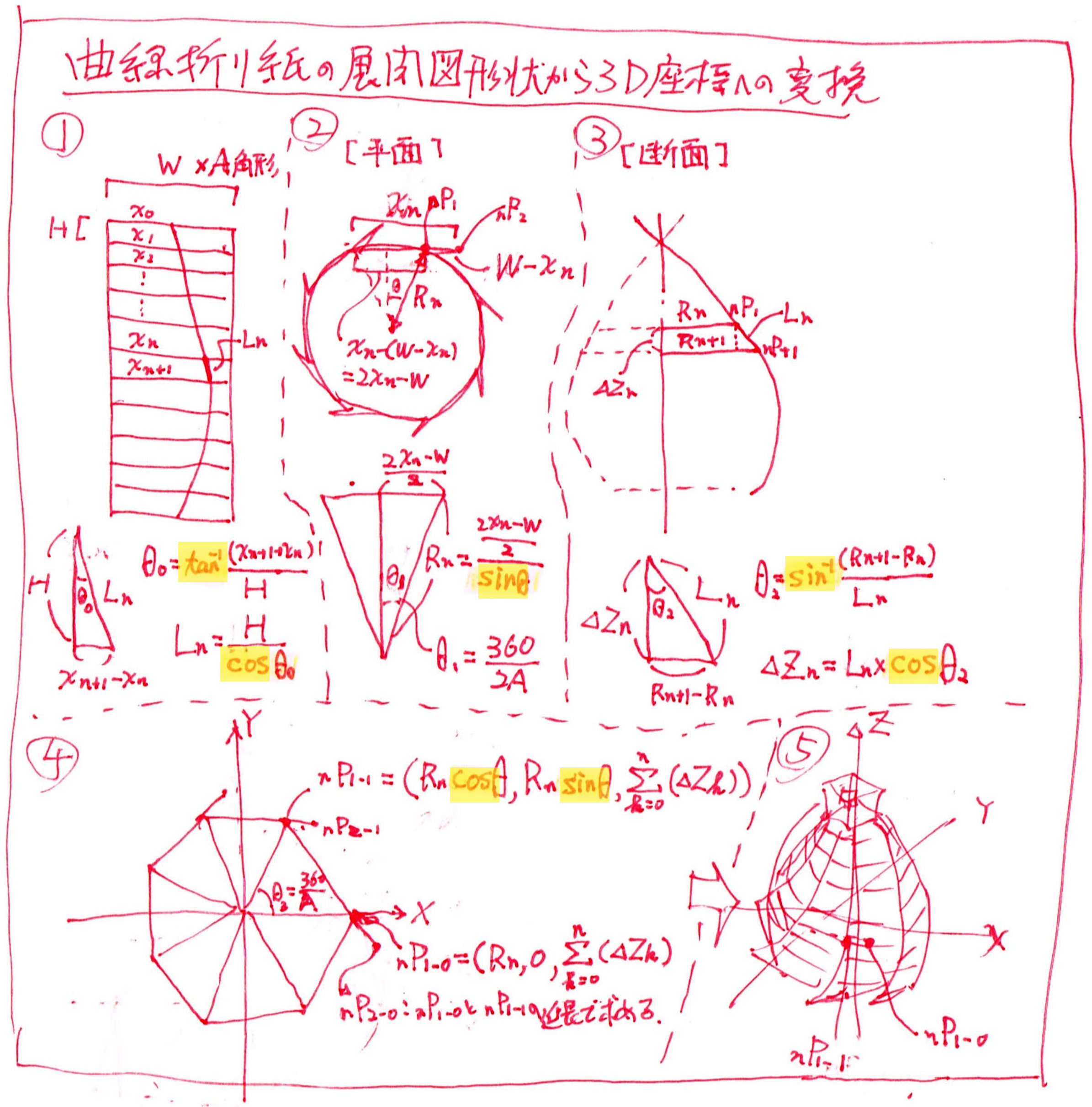
『曲面折り紙』では、単純な図形の繰り返しを折るだけで、複雑な形状ができあがったけれども、
最初の図形から完成形を正確に想像するのはなかなかむずかしい。

そこで、パソコンでプログラムを組んで、最初の単純な図形から、完成形の３Ｄの図形を描くように計算させてみた。
めちゃめちゃ難しそうに思うけれど、実は計算に使ったのは四則演算（足し算・引き算・掛け算・割り算）それに三角関数だけなのだ。（このプログラムも展示してします。）



展開図の形状からコンピュータ上の３Ｄモデルを生成するためにはどんな計算が必要？

各点の座標を求めるには三角関数が使えるだけで求められる！



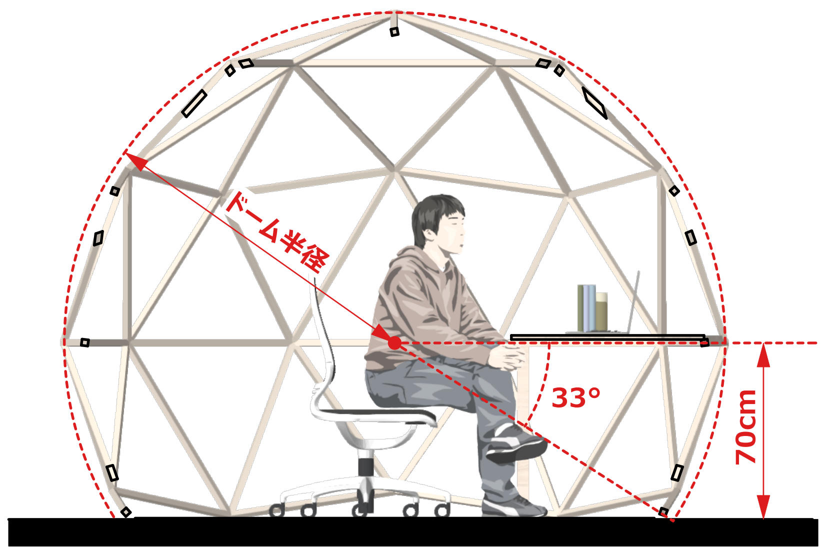
右のメモは、プログラムを組むためのメモだけど、やっていることは、分かっている長さから角度を求めたり、
分かっている角度から長さを求める、ということの繰り返し。

その時必要だったのは三角関数だけなのだ。

こんな風に『ある知識を少し知っているだけで、いろいろなことができるようになる』というようなことは世の中にはいくつもある。

今、君たちが勉強していることも、そんな知識の一つかも知れないね。
（その時はなかなか気づかないけどねー）

最後に、計算してみよう！



家の庭に、一人用の書斎をドームで作ろうと思う。

テーブルをフレームの高さ合わせてつくりたいので、図で示した高さを70cmにしたい。

ドームの中心から地面への接点の角度が32.6°だと分かったとすると、
ドームの半径をいくつで設定すればいいだろうか？
また、その時、ドームの一番高いところは床から何cmかな？

三角関数を使って求めてほしい。

答え：約128.5cm、約198.5cm